Jorge J. Feliu Batlle

Respuesta temporal de sistemas de 1º y 2º orden

Orden del sistema: es el grado del denominador

Utilidad:

- Sirve para identificar sistemas sencillos
- Sirve para estudiar el comportamiento de sistemas sencillos
- Sirve para diseñar reguladores, filtros, …

La respuesta se compone de dos partes: transitoria ($y_{rt}(t)$) y estacionaria ($y_{rp}(t)$)

$$y(t) = y_{rt}(t) + y_{rp}(t) \quad \text{tal que} \quad \begin{cases} y_{rp}(t) = \lim\limits_{t \to \infty} y(t) \\ \lim\limits_{t \to \infty} y_{rt}(t) = 0 \end{cases}$$

Jorge J. Feliu Batlle

Respuesta temporal de sistemas de 1º y 2º orden

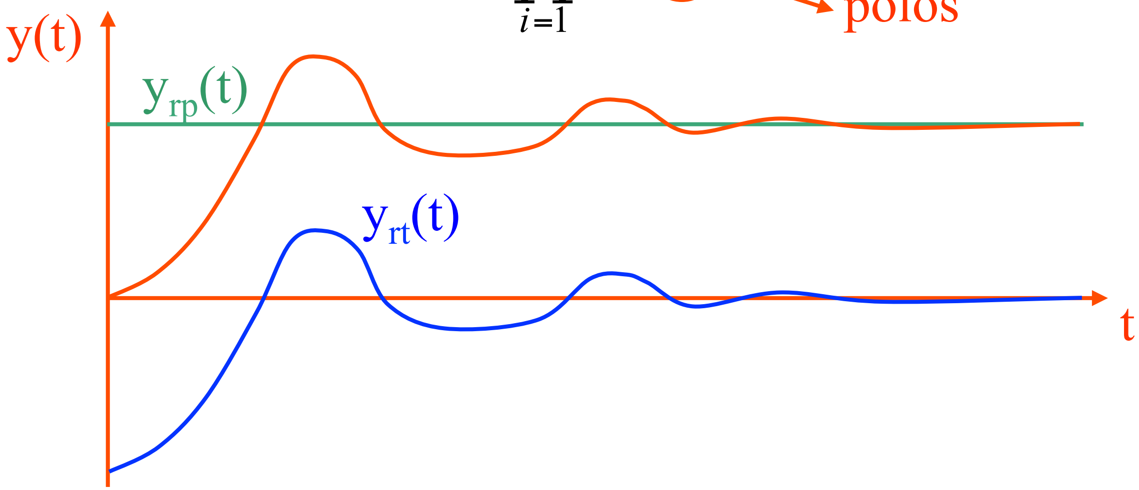
$$U(s) \longrightarrow \boxed{G(s)} \longrightarrow Y(s)$$

$$\Rightarrow \quad G(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{b_0 s^m + b_1 s^{m-1} + b_2 s^{m-2} + \cdots b_{m-1} s + b_m}{a_0 s^n + a_1 s^{n-1} + a_2 s^{n-2} + \cdots a_{n-1} s + a_n}$$

$$\Rightarrow \quad G(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = k \frac{\prod_{i=1}^{m} (s + z_i)}{\prod_{i=1}^{n} (s + p_i)} = \sum_{i=1}^{n} \frac{k_i}{s + p_i}$$

ceros

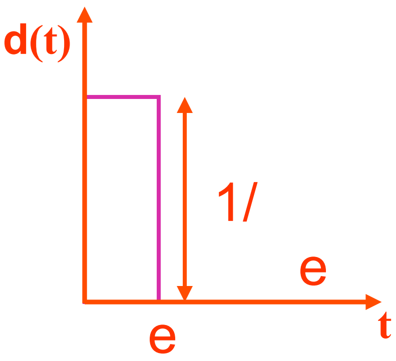
polos



Respuesta temporal de sistemas de 1º y 2º orden

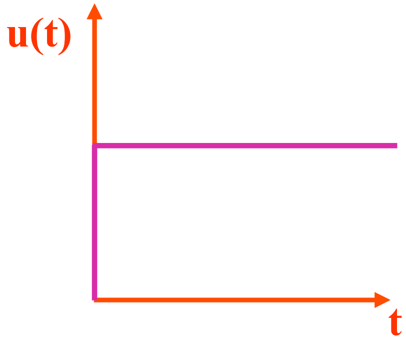
Tipos de señales de excitación habituales

Impulso

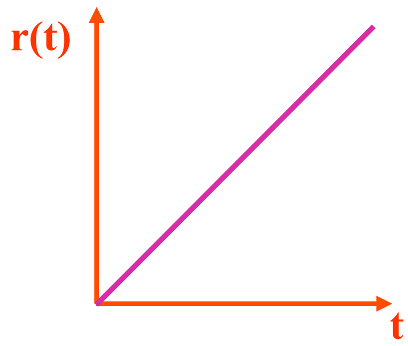


$$\varepsilon \rightarrow 0 \Rightarrow \int_0^t \delta(t)dt = 1$$

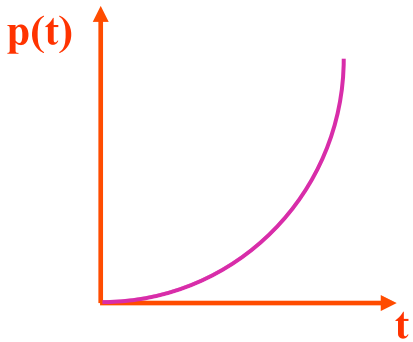
Escalón



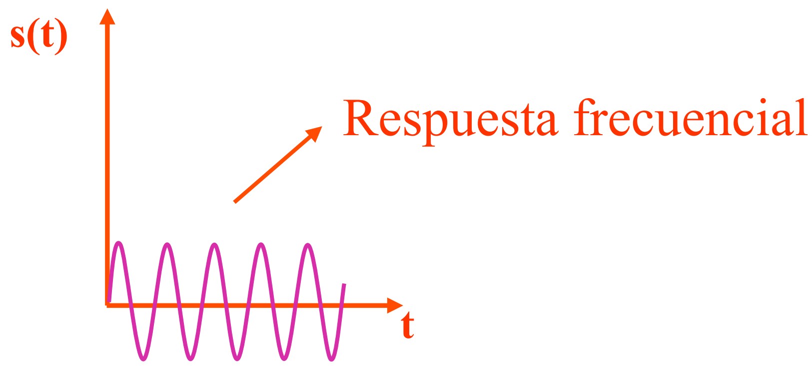
Rampa



Parábola

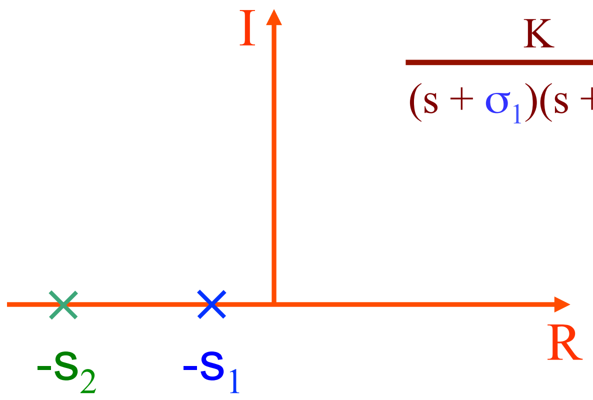


Seno



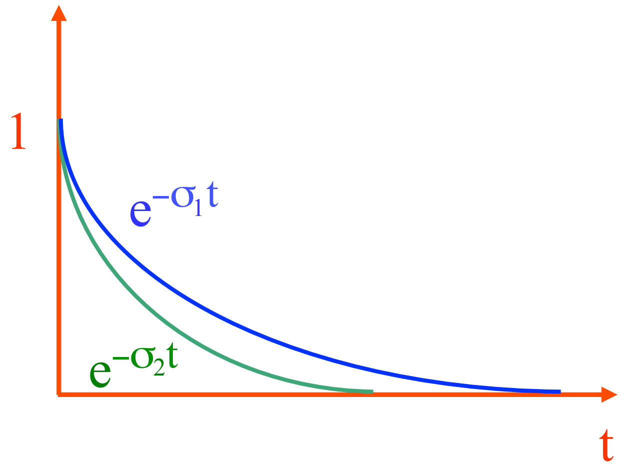
Respuesta temporal de sistemas de 1º y 2º orden

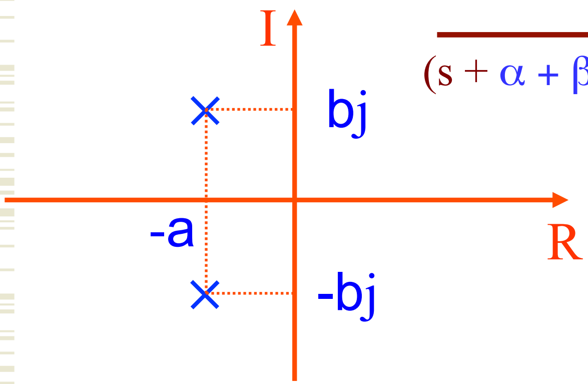
Relación entre $y_{rt}(t)$ y la situación de los polos



$$\frac{K}{(s+\sigma_1)(s+\sigma_2)}$$

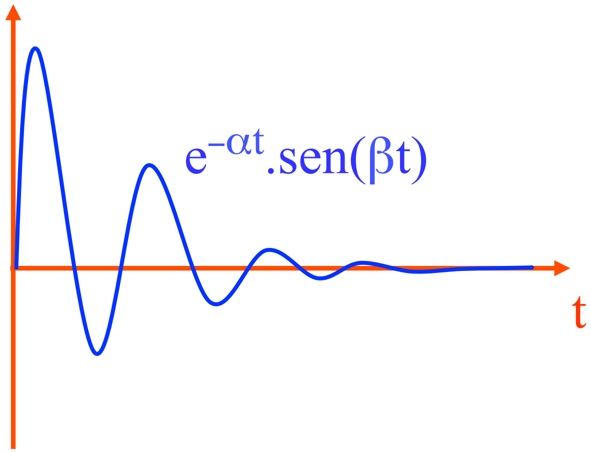
d(t)





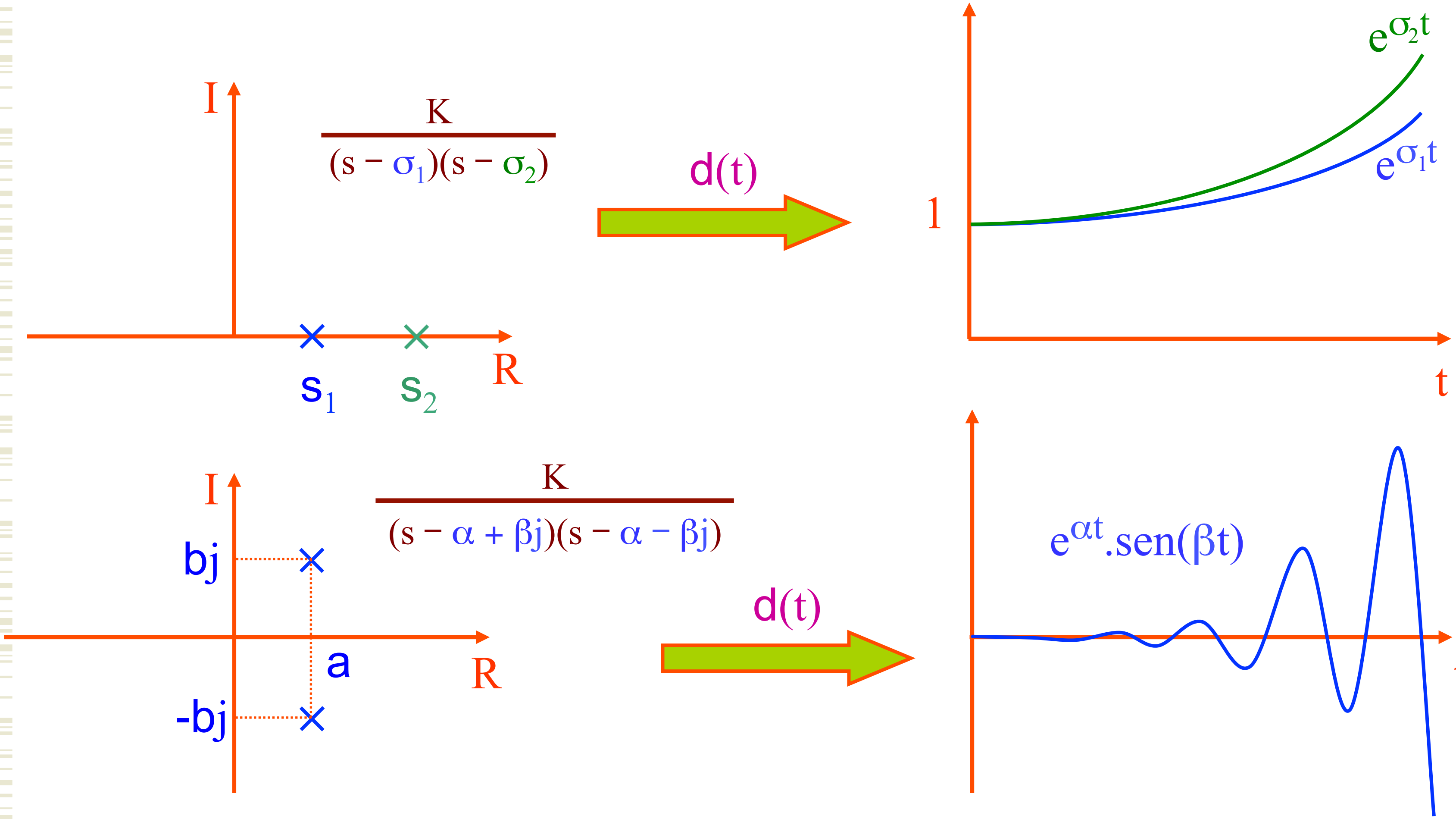
$$\frac{K}{(s+\alpha+\beta j)(s+\alpha-\beta j)}$$

d(t)



Respuesta temporal de sistemas de 1º y 2º orden

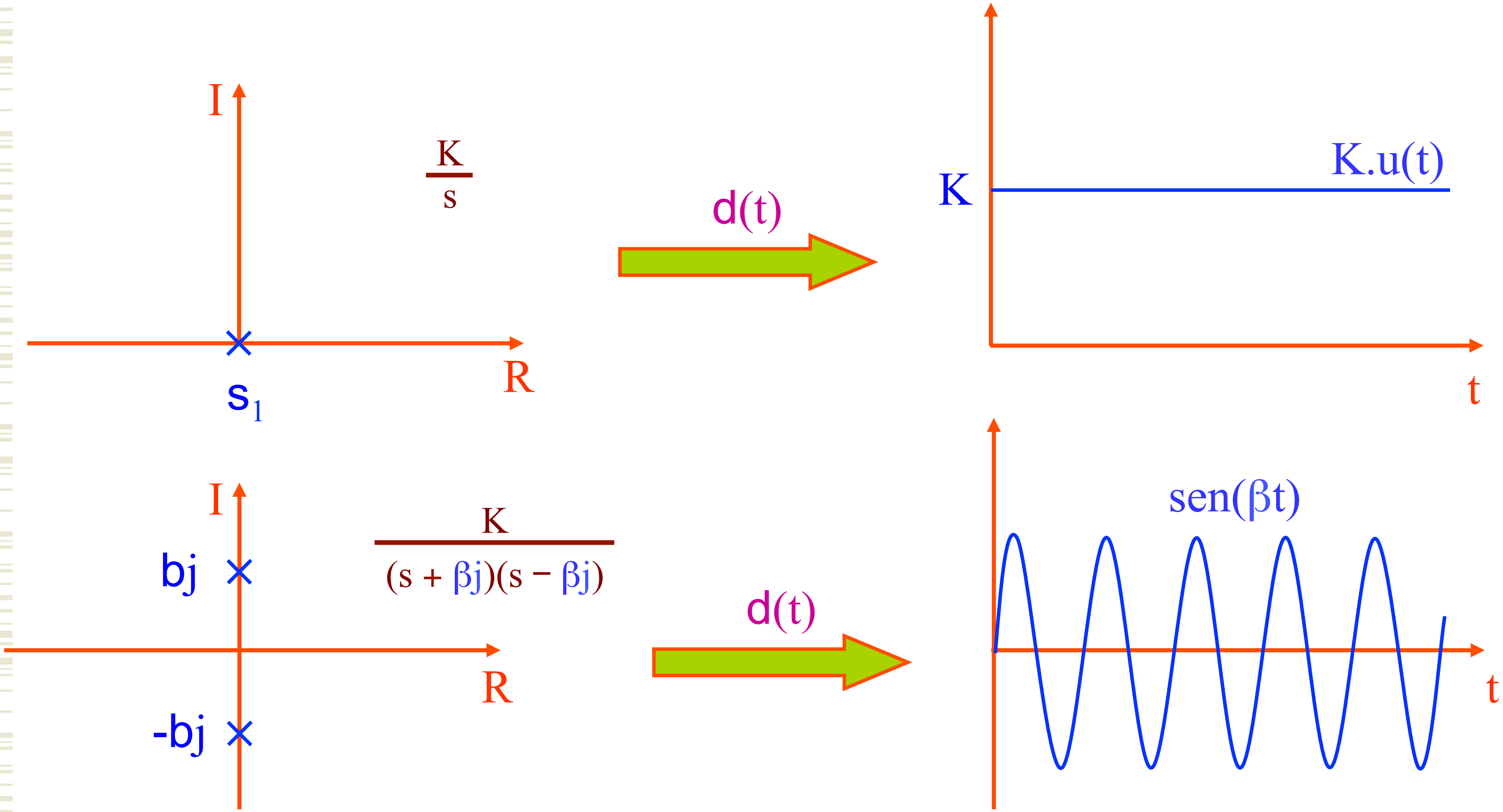
Relación entre $y_{rt}(t)$ y la situación de los polos



Jorge J. Feliu Batlle

Respuesta temporal de sistemas de 1º y 2º orden

Relación entre $y_{rt}(t)$ y la situación de los polos



Respuesta temporal de sistemas de 1º y 2º orden

Relación entre $y_{rt}(t)$ y la situación de los polos

Si todos los polos tienen parte real negativa el sistema es estable

Si algún polo tiene parte real positiva el sistema es inestable

Los polos reales dan respuestas NO oscilantes

Los polos con parte imaginaria dan respuestas SÍ oscilantes

Los polos en el origen dan respuestas “limitadamente estables”

Los polos sobre el eje imaginario dan respuestas “marginalmente estables”

Ante entrada impulso la respuesta de los sistemas estables tiende a cero

La respuesta es más rápida cuanto más alejados están los polos del eje imaginario

Respuesta temporal de sistemas de 1º y 2º orden

Sistemas de primer orden

Provienen de una ecuación diferencial del tipo:

$$a_0 \frac{dy(t)}{dt} + a_1 y(t) = b_0 \frac{du(t)}{dt} + b_1 u(t) \quad a_i > 0 \ y \ b_i > 0 \ \ i = 0,1$$

$$\xrightarrow{\mathcal{L}} \quad \frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{b_0 s + b_1}{a_0 s + a_1}$$

orden 1

Sistemas de primer orden simple $\Rightarrow$ $b_0 = 0$ $\Rightarrow$ $\dfrac{Y(s)}{U(s)} = \dfrac{K}{Ts + 1}$

Ganancia del sistema

b_1/a_1

Constante de tiempo

a_0/a_1

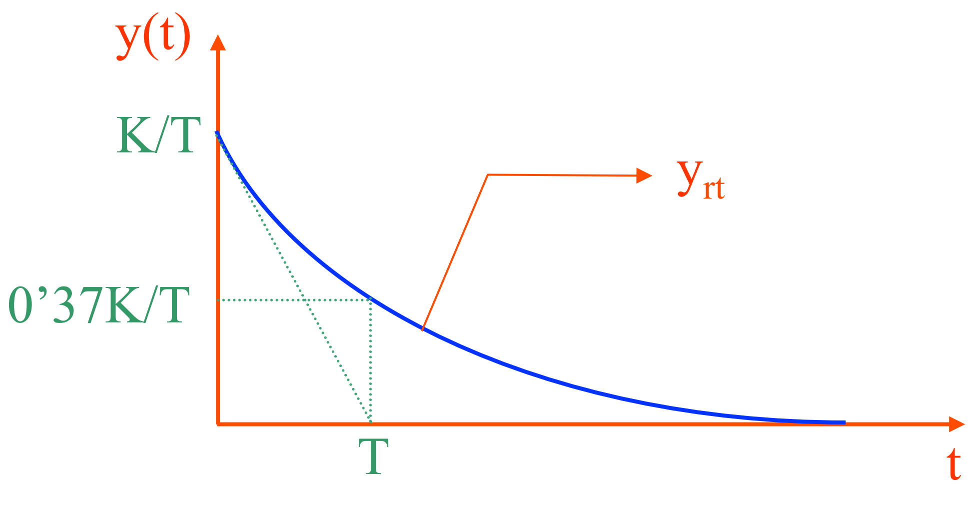
$\Rightarrow$ Un único polo real en -1/T

Respuesta temporal de sistemas de 1º y 2º orden

Sistemas de primer orden: $\dfrac{Y(s)}{U(s)} = \dfrac{K}{Ts+1}$

Respuesta impulsional: U(s) = 1

$$Y(s) = \frac{K}{Ts+1} \xrightarrow{\mathcal{L}^{-1}} y(t) = \frac{K}{T} e^{-t/T} \quad (t \geq 0)$$



Valores característicos

y(0) = K/T

y(T) = 0'37K/T

$\dot{y}(0) = -K/T^2$

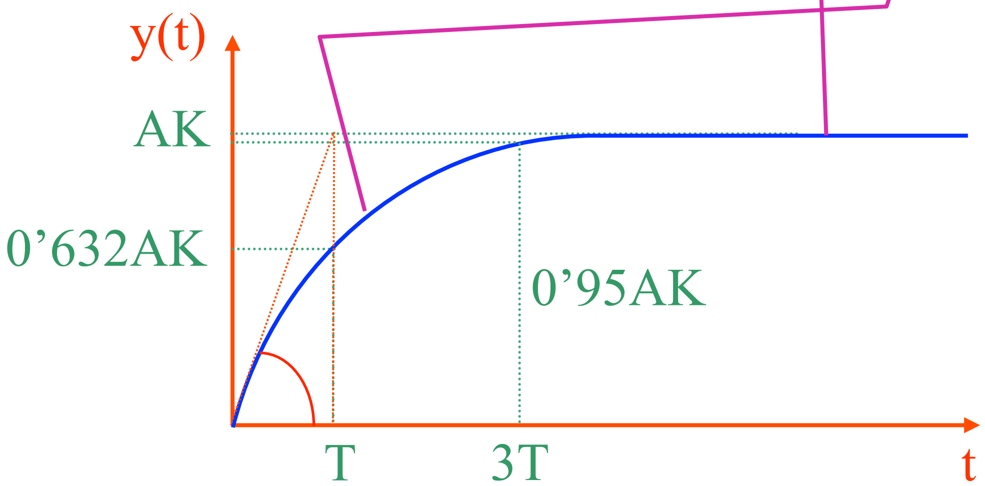
Jorge J. Feliu Batlle

Respuesta temporal de sistemas de 1º y 2º orden

Sistemas de primer orden: $\dfrac{Y(s)}{U(s)} = \dfrac{K}{Ts+1}$

Respuesta ante escalón: U(s) = A/s

$$Y(s) = \frac{K}{Ts+1}\,\frac{A}{s} \xrightarrow{\mathcal{L}^{-1}} y(t) = AK\left(1 - e^{-t/T}\right) \quad (t \geq 0)$$



t_s = tiempo de establecimiento

<u>Valores característicos</u>

y(0) = 0

y(T) = 0’632AK

$\dot{y}(0)$ = AK/T

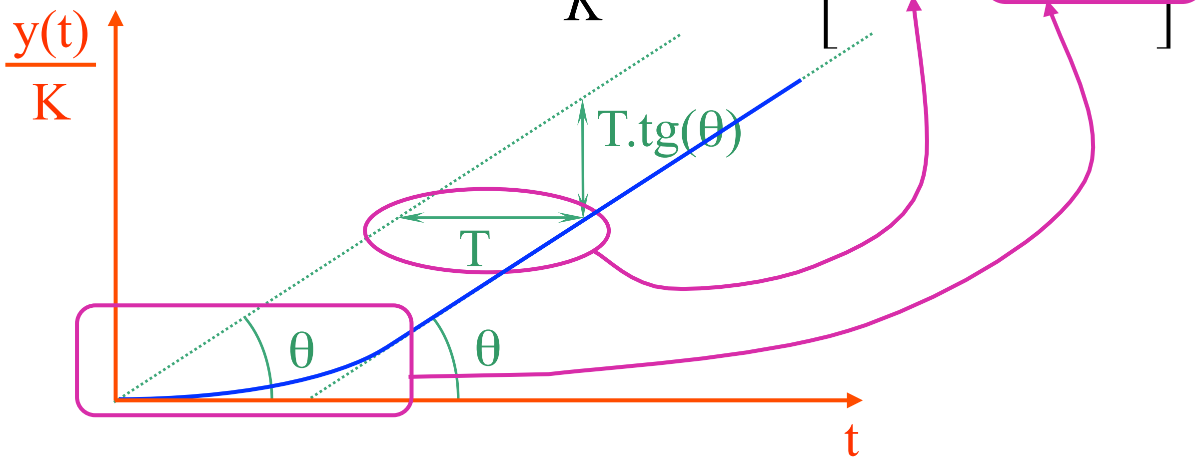
Respuesta temporal de sistemas de 1º y 2º orden

Sistemas de primer orden: $\dfrac{Y(s)}{U(s)} = \dfrac{K}{Ts+1}$

Respuesta ante rampa: $U(s) = tg(\theta).1/s^2$

$$Y(s) = \frac{K}{Ts+1} tg(\theta) \frac{1}{s^2} \xrightarrow{\mathcal{L}^{-1}} y(t) = K.tg(\theta)\left[t - T + Te^{-t/T}\right] \quad (t \geq 0)$$

$\Rightarrow$ Normalizando $\Rightarrow$ $\dfrac{y(t)}{K} = tg(\theta)\left[t - T + \boxed{Te^{-t/T}}\right] \quad (t \geq 0)$



Respuesta temporal de sistemas de 1º y 2º orden

Sistemas de segundo orden

Provienen de una ecuación diferencial del tipo:

$$a_0 \frac{d^2 y(t)}{dt^2} + a_1 \frac{dy(t)}{dt} + a_2 y(t) = b_0 \frac{d^2 u(t)}{dt^2} + b_1 \frac{du(t)}{dt} + b_2 u(t) \quad a_i > 0 \ y, b_i > 0 \ \ i = 0..2$$

$$\xrightarrow{\mathcal{L}} \quad \frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{b_0 s^2 + b_1 s + b_2}{a_0 s^2 + a_1 s + a_2}$$

orden 2

Sistemas de segundo orden simple $\Rightarrow$ $b_0 = b_1 = 0$ $\Rightarrow$ $\dfrac{Y(s)}{U(s)} = \dfrac{K\omega_n^2}{s^2 + 2\xi\omega_n s + \omega_n^2}$

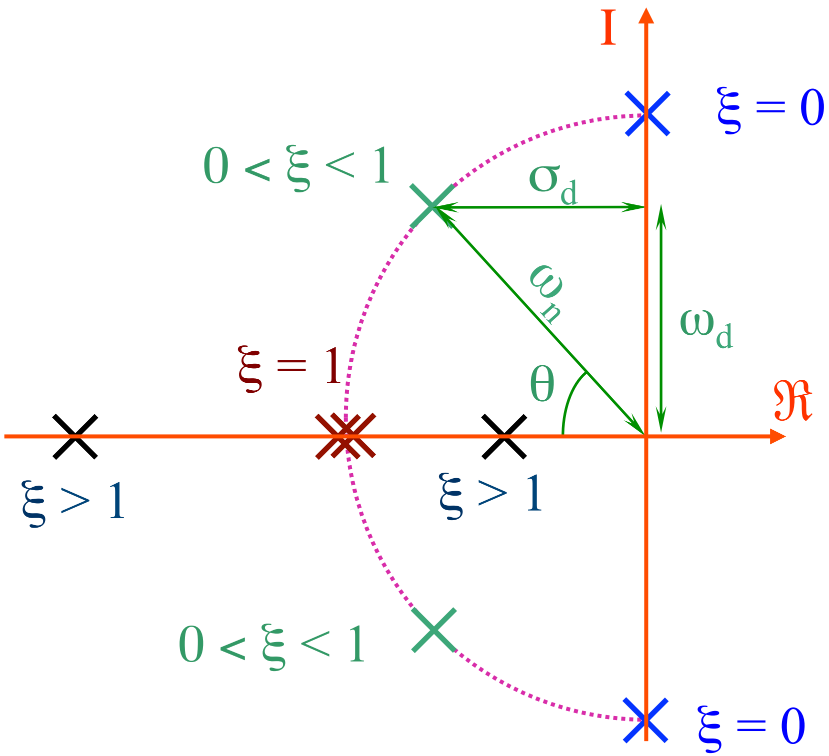
ω_n: frecuencia natural no amortiguada (rad/s)

ξ: factor de amortiguamiento

Respuesta temporal de sistemas de 1º y 2º orden

Sistemas de segundo orden: $\dfrac{Y(s)}{U(s)} = \dfrac{K\omega_n^2}{s^2 + 2\xi\omega_n s + \omega_n^2}$

Polos: $s = -\xi\omega_n \pm \omega_n\sqrt{\xi^2 - 1}$ ⇨ Dos polos complejos conjugados



Casos

$\xi = 0$ ⇨ $s = \pm\omega_n j$

$0 < \xi < 1$ ⇨ $s = -\xi\omega_n \pm \omega_n\sqrt{1-\xi^2}\, j$

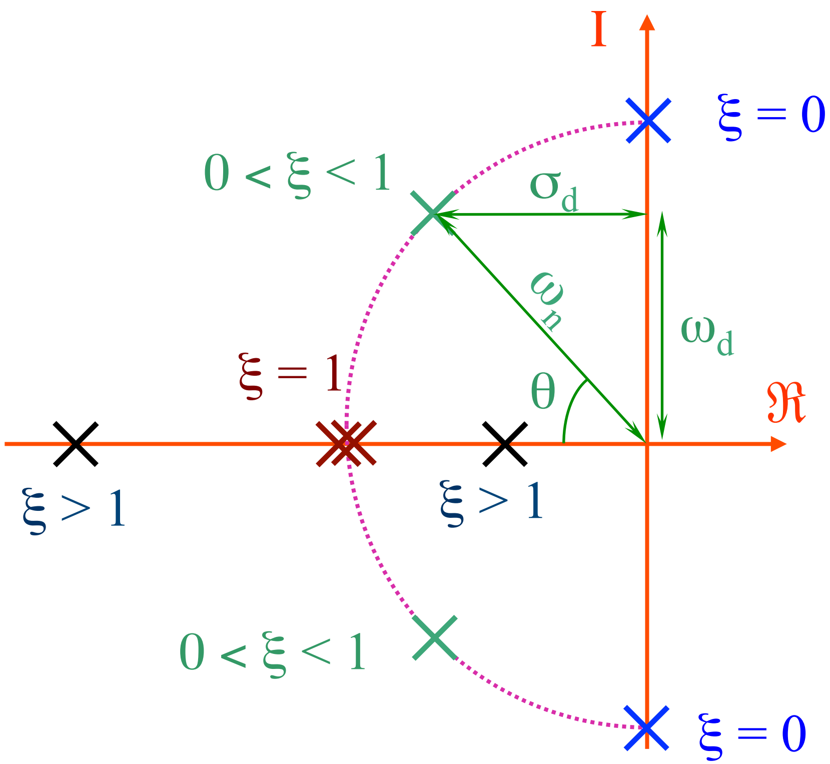
$\xi = 1$ ⇨ $s = -\omega_n$

$\xi > 1$ ⇨ $s = -\xi\omega_n \pm \omega_n\sqrt{\xi^2 - 1}$

Jorge J. Feliu Batlle

Respuesta temporal de sistemas de 1º y 2º orden

Sistemas de segundo orden: $\dfrac{Y(s)}{U(s)} = \dfrac{K\omega_n^2}{s^2 + 2\xi\omega_n s + \omega_n^2}$



Relaciones

ω_d: frecuencia amortiguada = $\omega_n\sqrt{1-\xi^2}$

σ_d: factor decrecimiento = $\xi\omega_n$

$\xi = \cos(\theta)$ $(0 \leq \theta \leq \pi/2)$

Jorge J. Feliu Batlle

Respuesta temporal de sistemas de 1º y 2º orden

Sistemas de segundo orden: $\frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{K\omega_n^2}{s^2 + 2\xi\omega_n s + \omega_n^2}$

Respuesta impulsional: U(s) = 1 ⇨ $Y(s) = \frac{K\omega_n^2}{s^2 + 2\xi\omega_n s + \omega_n^2}$ $\xrightarrow{\mathcal{L}^{-1}}$

ξ = 0 ⇨ $y(t) = K\omega_n.sen(\omega_n t)$

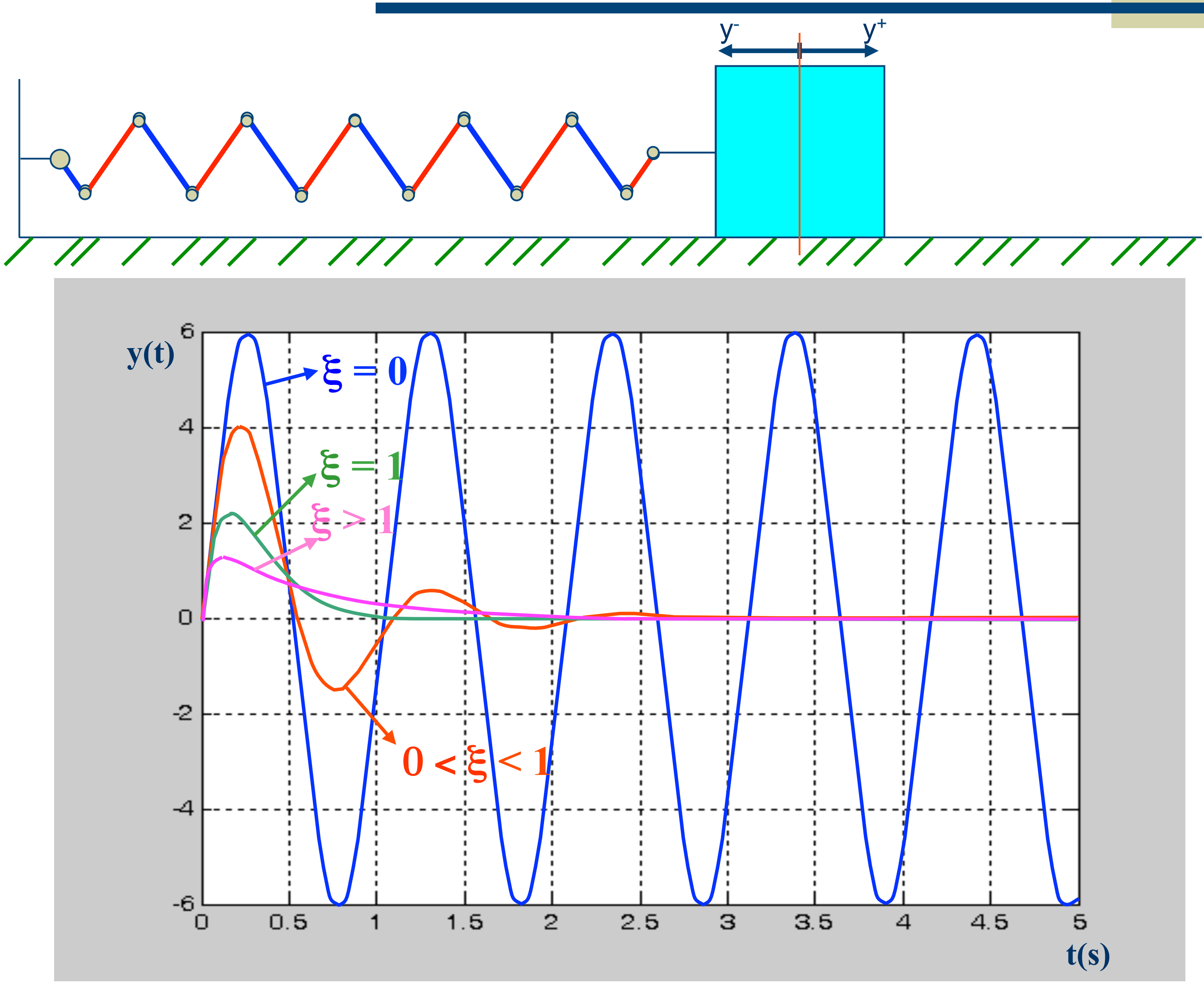
0 < ξ < 1 ⇨ $y(t) = K\left[\frac{\omega_n}{\sqrt{1-\xi^2}}.e^{-\sigma_d t}.sen(\omega_d t)\right]$

ξ = 1 ⇨ $y(t) = K\left[\omega_n^2.t.e^{-\omega_n t}\right]$

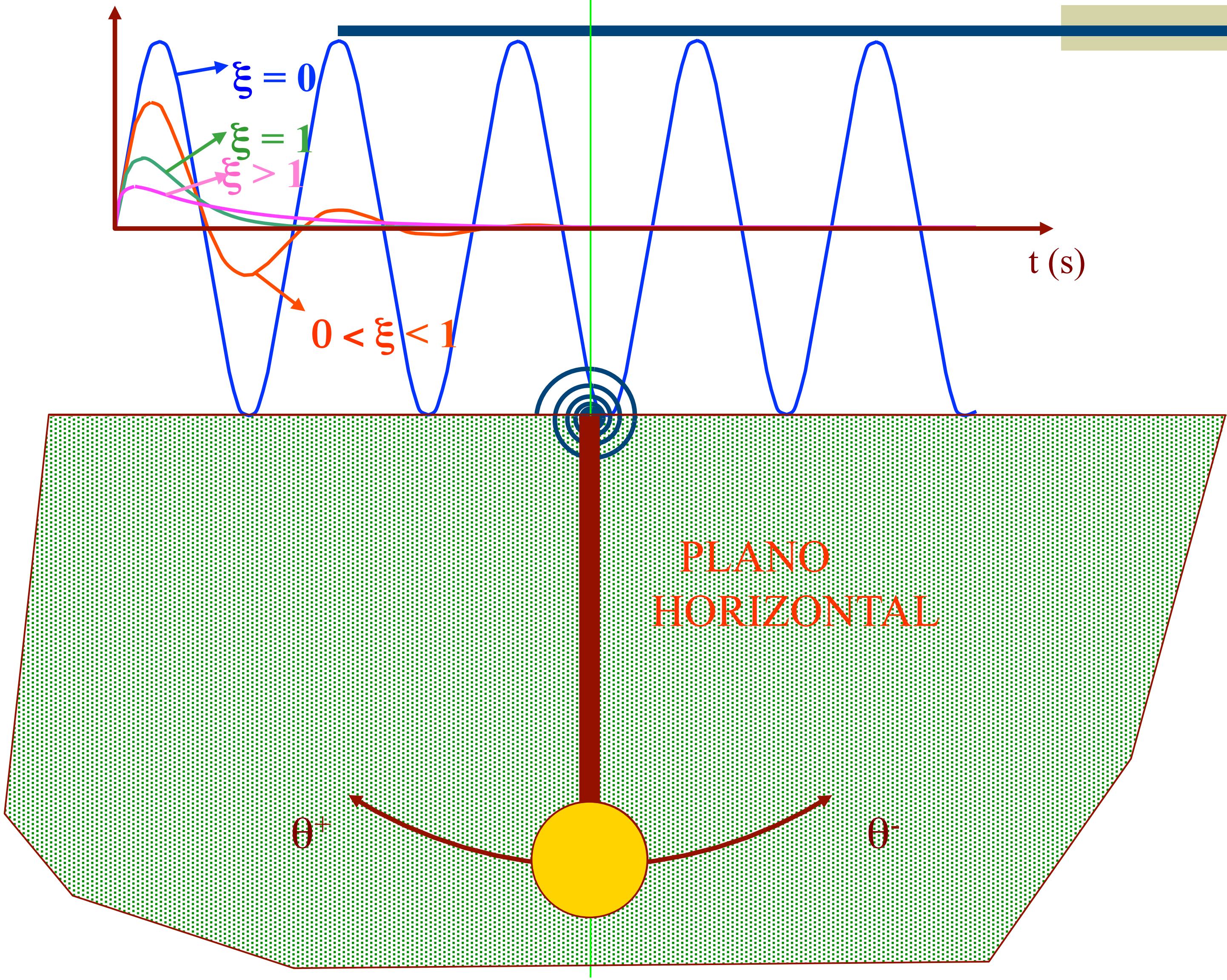
ξ > 1 ⇨ $y(t) = K\left[\frac{\omega_n}{2\sqrt{\xi^2-1}}\left[e^{-\omega_n\left(\xi-\sqrt{\xi^2-1}\right)t} - e^{-\omega_n\left(\xi+\sqrt{\xi^2-1}\right)t}\right]\right]$

Jorge J. Feliu Batlle

Respuesta temporal de sistemas de 1º y 2º orden



Respuesta temporal de sistemas de 1º y 2º orden



Respuesta temporal de sistemas de 1º y 2º orden

Sistemas de segundo orden: $\dfrac{Y(s)}{U(s)} = \dfrac{K\omega_n^2}{s^2 + 2\xi\omega_n s + \omega_n^2}$

Respuesta ante escalón: U(s) = A/s $\Rightarrow$ $Y(s) = \dfrac{K\omega_n^2}{s^2 + 2\xi\omega_n s + \omega_n^2}\dfrac{A}{s}$ $\xrightarrow{\mathcal{L}^{-1}}$

$\xi = 0$ $\Rightarrow$ $y(t) = A.K\left[1 - \cos(\omega_n t)\right]$

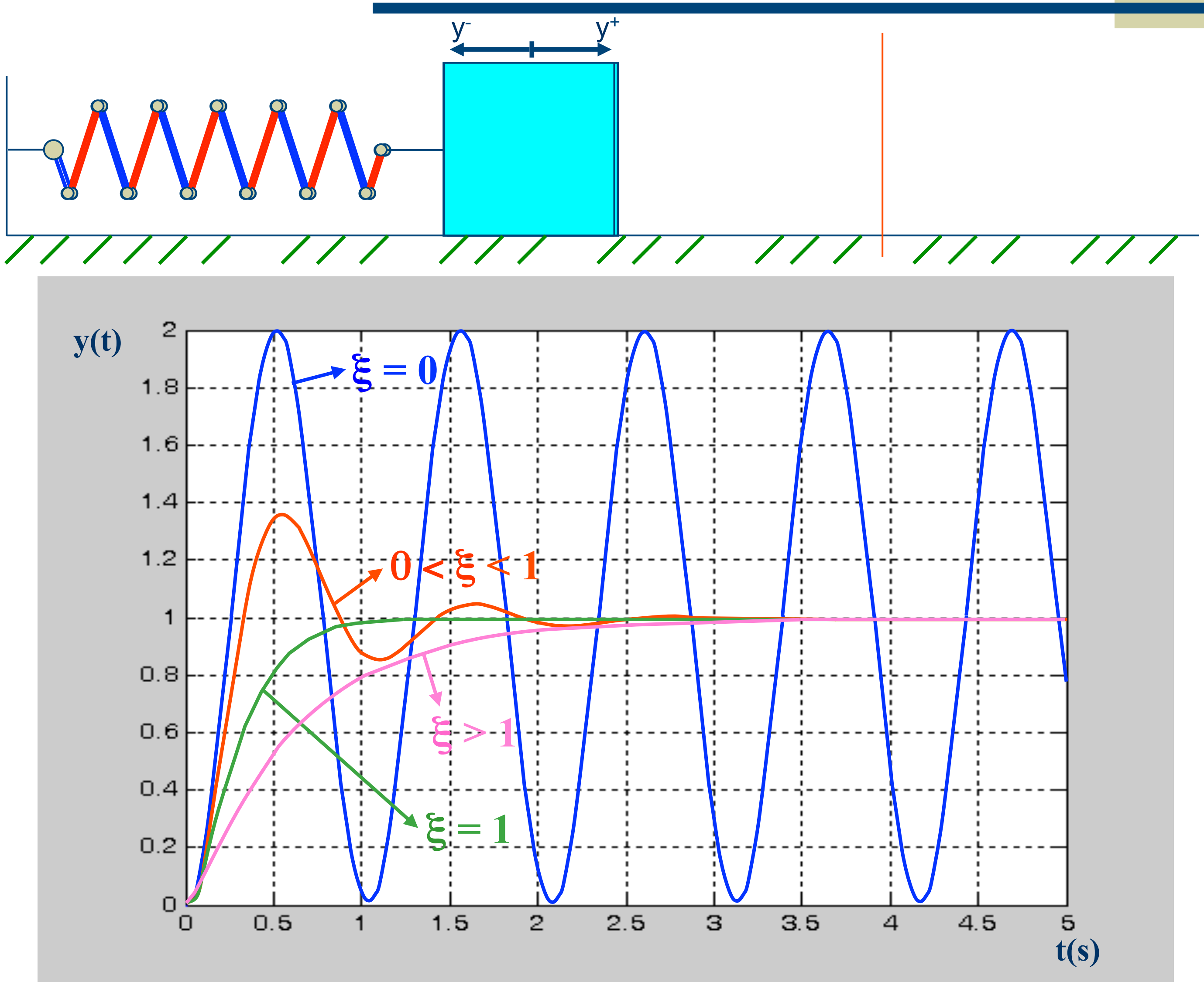
$0 < \xi < 1$ $\Rightarrow$ $y(t) = AK\left[1 - \dfrac{e^{-\xi\omega_n t} sen(\omega_d t + \theta)}{\sqrt{1-\xi^2}}\right]$

$\xi = 1$ $\Rightarrow$ $y(t) = AK\left[1 - e^{-\omega_n t}(1 + \omega_n t)\right]$

$\xi > 1$ $\Rightarrow$ $y(t) = AK\left[1 + \dfrac{\omega_n}{2\sqrt{\xi^2 - 1}}\left[\dfrac{e^{-\omega_n\left(\xi + \sqrt{\xi^2-1}\right)t}}{\omega_n\left(\xi + \sqrt{\xi^2 - 1}\right)} - \dfrac{e^{-\omega_n\left(\xi - \sqrt{\xi^2-1}\right)t}}{\omega_n\left(\xi - \sqrt{\xi^2 - 1}\right)}\right]\right]$

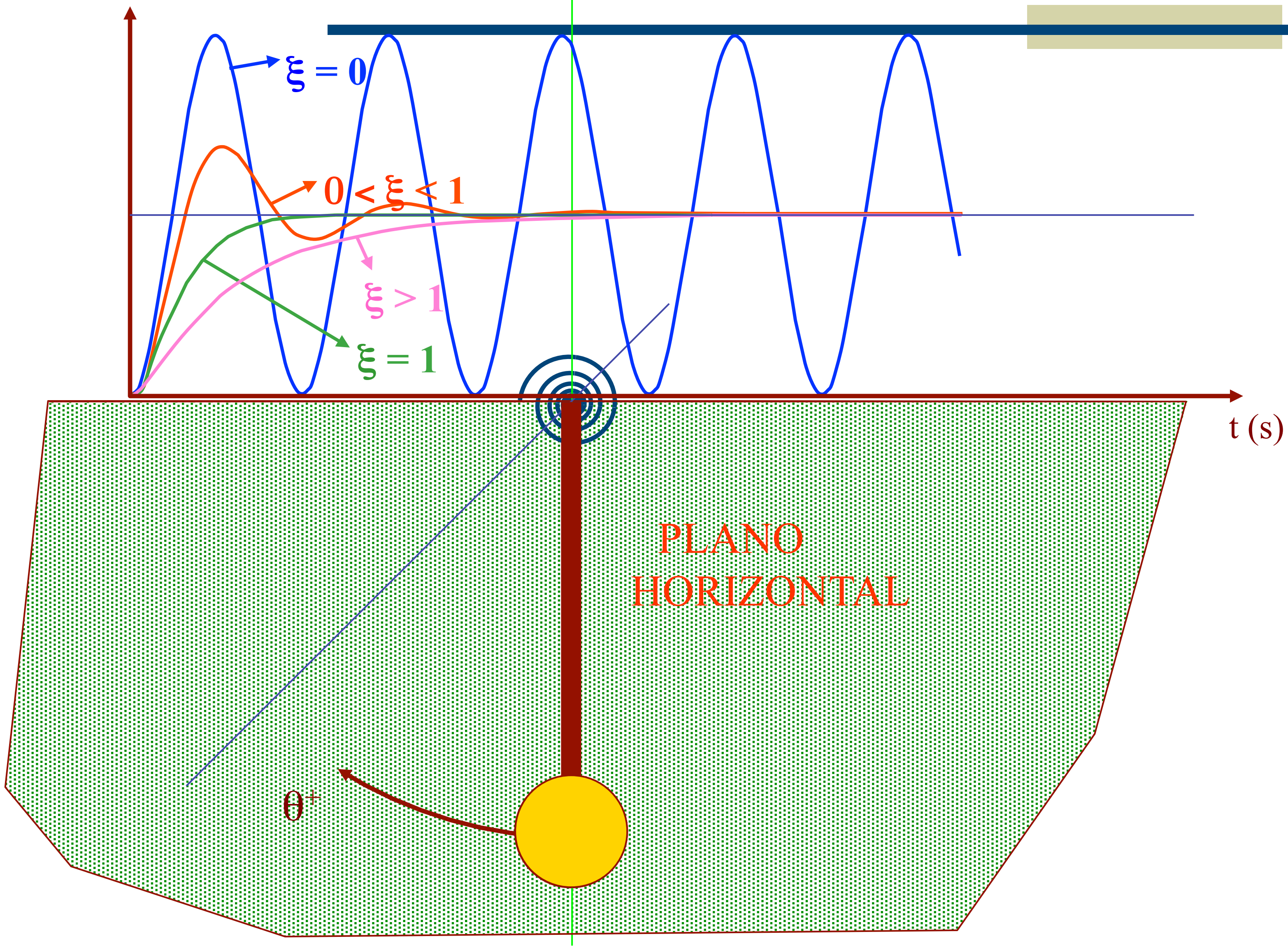
Jorge J. Feliu Batlle

Respuesta temporal de sistemas de 1º y 2º orden



Jorge J. Feliu Batlle

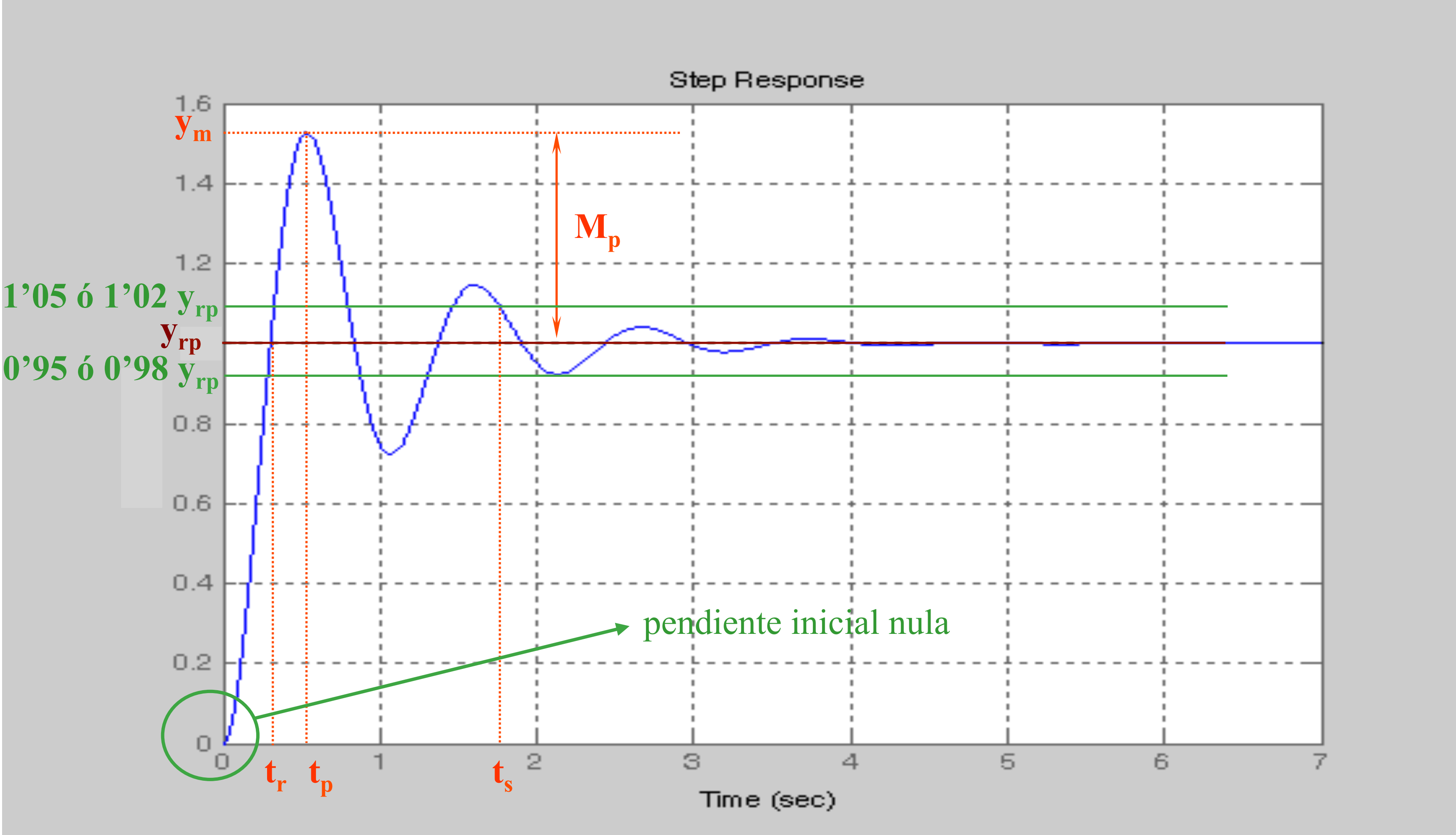
Respuesta temporal de sistemas de 1º y 2º orden



Jorge J. Feliu Batlle

Respuesta temporal de sistemas de 1º y 2º orden

Valores característicos de la respuesta transitoria



Respuesta temporal de sistemas de 1º y 2º orden

Valores característicos de la respuesta transitoria

- Tiempo de pico (t_p): instante en el que se produce el máximo (y_m):

$$t_p = \frac{\pi}{\omega_d}$$

- Pico de sobreoscilación (M_p): diferencia porcentual entre y_m e y_{rp}:

$$M_p(\%) = \frac{y_m - y_{rp}}{y_{rp}} \times 100 = e^{-\left(\frac{\xi\pi}{\sqrt{1-\xi^2}}\right)} \times 100 = e^{-\frac{\pi}{tg(\theta)}} \times 100$$

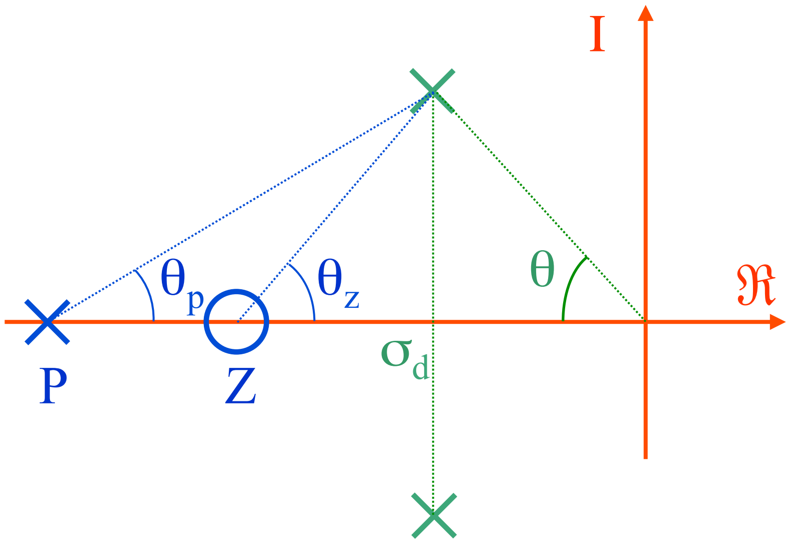
- Tiempo de subida (t_r): instante en el que la señal llega por primera vez a y_{rp}:

$$t_r = \frac{\pi - \theta}{\omega_d}$$

- Tiempo de establecimiento (t_s): instante en el que la señal queda acotada entre el ± 2% y_{rp} ó ± 5% y_{rp}:

$$t_s = \frac{4}{\sigma_d}(2\%) \quad o \quad t_s = \frac{3}{\sigma_d}(5\%)$$

Sistemas de 2º orden. Ceros y polos adicionales



Cero adicional

- t_r baja si θ_z sube ⟺ Z tiende a I
- t_p baja si θ_z sube ⟺ ′′ ′′
- M_p sube si θ_z sube ⟺ ′′ ′′
- t_s no tiene una relación directa con θ_z

Polo adicional

- t_r sube si θ_p sube ⟺ P tiende a σ_d
- t_p sube si θ_p sube ⟺ ′′ ′′
- M_p baja si θ_p sube ⟺ ′′ ′′
- t_s no tiene una relación directa con θ_p

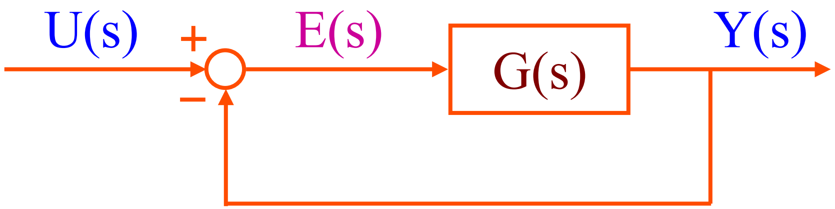
→ A la izquierda de σ_d

⇓

Si se pone a la derecha de σ_d el sistema se comporta de forma parecida a uno de primer orden

Análisis de la respuesta estacionaria (errores)

Se estudia la capacidad del sistema para seguir las señales de referencia



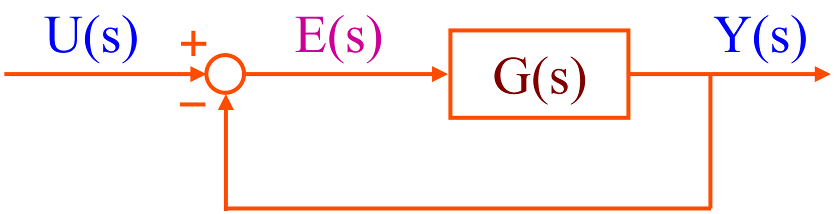
$$G(s) = \frac{K.N(s)}{D(s)}$$

$$\left.\begin{array}{l} \dfrac{Y(s)}{U(s)} = \dfrac{G(s)}{1+G(s)} \\ \\ E(s) = U(s) - Y(s) \end{array}\right\} \Rightarrow \frac{E(s)}{U(s)} = \frac{1}{1+G(s)} \Rightarrow E(s) = \frac{1}{1+G(s)}U(s)$$

$$\Rightarrow \boxed{e_{rp} = \lim_{s\to 0} s\frac{1}{1+G(s)}U(s)}$$

Análisis de la respuesta estacionaria (errores)

Señales típicas de entrada:



1

Escalón: $u(t) = A$ ⇒ $U(s) = A/s$ ⇒ Error de posición: e_p

Rampa: $u(t) = tg(\theta).t$ ⇒ $U(s) = tg(\theta).1/s^2$ ⇒ Error de velocidad: e_v

Parábola: $u(t) = B.t^2$ ⇒ $U(s) = 2B.1/s^3$ ⇒ Error de aceleración: e_a

1/2

Análisis de la respuesta estacionaria (errores)

Error de posición (e_p)

$$e_p = \lim_{s \to 0} s \frac{1}{1+G(s)} \frac{A}{s} = \lim_{s \to 0} \frac{A}{1+G(s)}$$

K_p: constante de error de posición = $\lim_{s \to 0} G(s)$

$\Rightarrow$ $$\boxed{e_p = \frac{A}{1+K_p}}$$

Si G(s) tiene cero polos en s = 0 $\Rightarrow$ $K_p = \dfrac{K.N(0)}{D(0)}$ $\Rightarrow$ $\uparrow K$ $\Rightarrow$ $\downarrow e_p$

Si G(s) tiene un polo en s = 0 $\Rightarrow$ $K_p = \infty$ $\Rightarrow$ $e_p = 0$

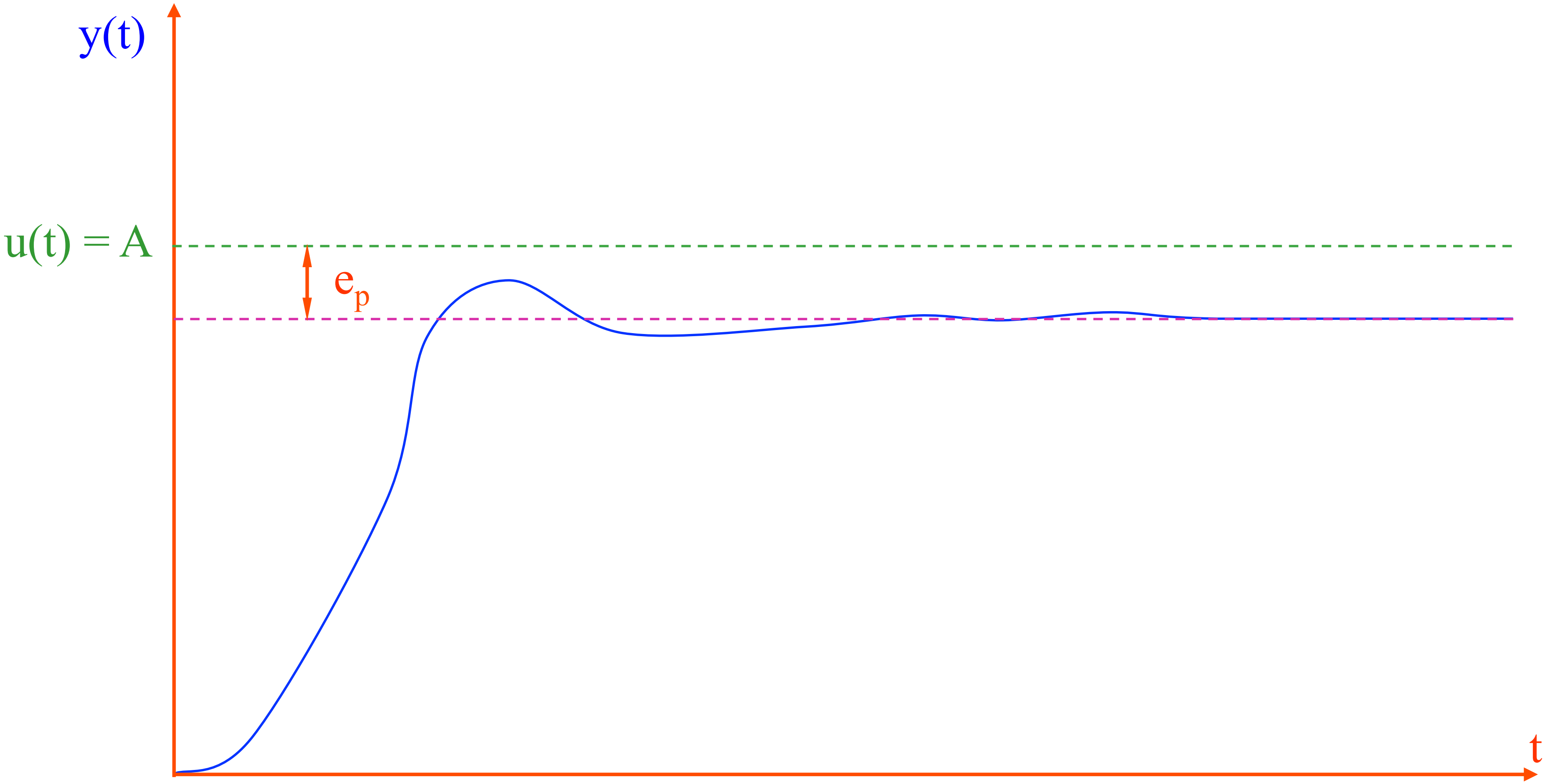
Si G(s) tiene dos polos en s = 0 $\Rightarrow$ $K_p = \infty$ $\Rightarrow$ $e_p = 0$

…

Jorge J. Feliu Batlle

Análisis de la respuesta estacionaria (errores)

Error de posición (e_p)



Análisis de la respuesta estacionaria (errores)

Error de velocidad (e_v)

$$e_v = \lim_{s \to 0} s \frac{1}{1+G(s)} tg(\theta) \frac{1}{s^2} = tg(\theta) \lim_{s \to 0} \frac{1}{sG(s)}$$

K_v: constante de error de velocidad = $\lim_{s \to 0} s.G(s)$

$$\boxed{e_v = \frac{tg(\theta)}{K_v}}$$

Si G(s) tiene cero polos en s = 0 ⇨ $K_v = 0$ ⇨ $e_v = \infty$

Si G(s) tiene un polo en s = 0 ⇨ $K_v = \dfrac{K.N(0)}{\hat{D}(0)}$ ⇨ $\uparrow K$ ⇨ $\downarrow e_v$

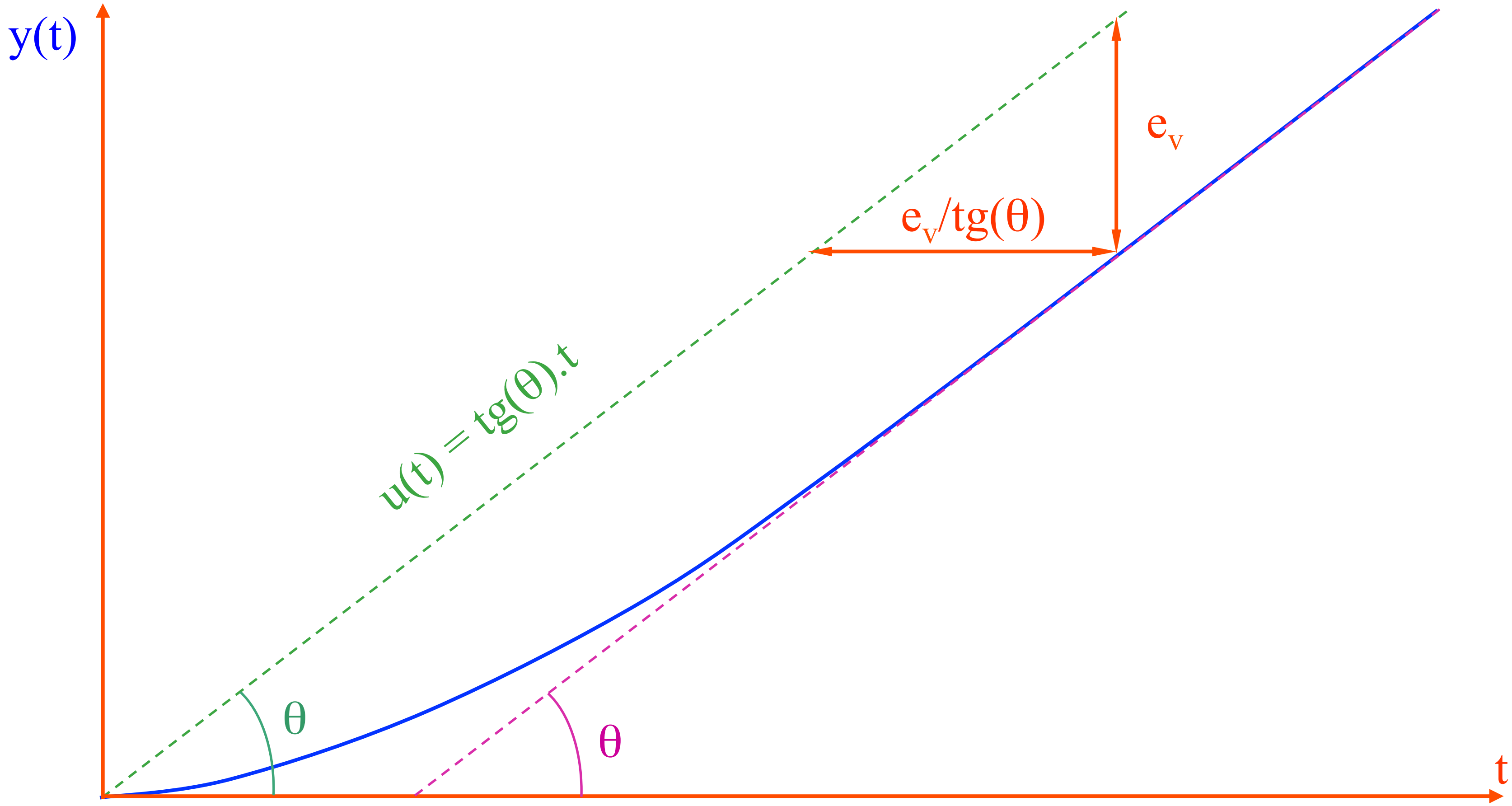
Si G(s) tiene dos polos en s = 0 ⇨ $K_v = \infty$ ⇨ $e_v = 0$

…

Jorge J. Feliu Batlle

Análisis de la respuesta estacionaria (errores)

Error de velocidad (e_v)



Análisis de la respuesta estacionaria (errores)

Error de aceleración (e_a)

$$e_a = \lim_{s\to 0} s\frac{1}{1+G(s)} B\frac{1}{s^3} = B\lim_{s\to 0}\frac{1}{s^2 G(s)}$$

K_a: constante de error de aceleración = $\lim_{s\to 0} s^2.G(s)$

$$e_a = \frac{B}{K_a}$$

Si G(s) tiene cero polos en s = 0 ⇒ $K_a = 0$ ⇒ $e_a = \infty$

Si G(s) tiene un polo en s = 0 ⇒ $K_a = 0$ ⇒ $e_a = \infty$

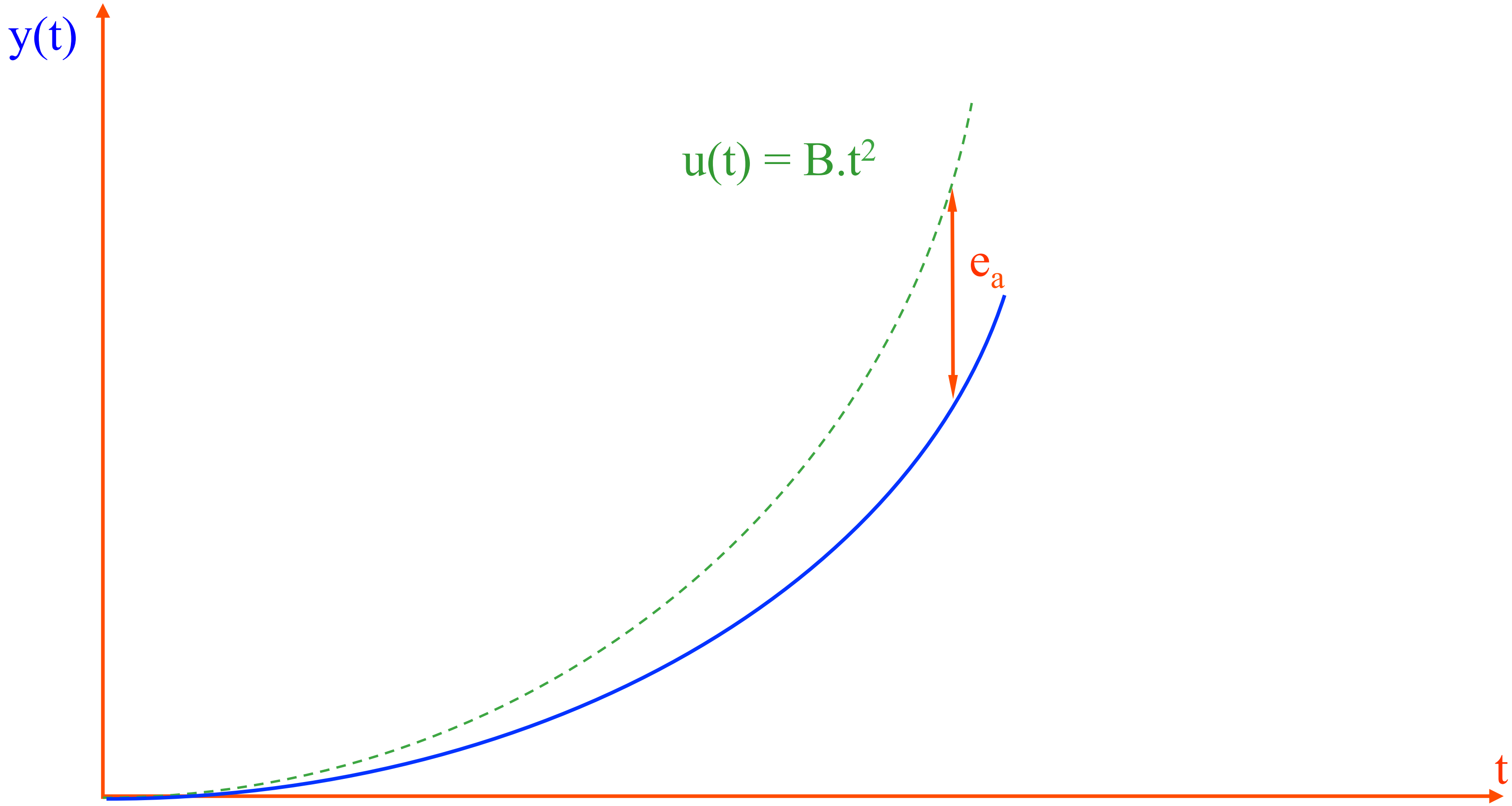
Si G(s) tiene dos polos en s = 0 ⇒ $K_a = \dfrac{K.N(0)}{\widehat{D}(0)}$ ⇒ $\uparrow K$ ⇒ $\downarrow e_a$

Si G(s) tiene tres polos en s = 0 ⇒ $K_a = \infty$ ⇒ $e_a = 0$

…

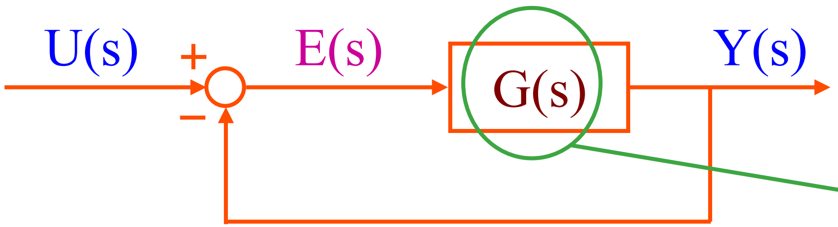
Análisis de la respuesta estacionaria (errores)

Error de aceleración (e_a)



Análisis de la respuesta estacionaria (errores)

Tipo de un sistema: número de polos en s = 0 de G(s)



$$G(s) = \frac{1}{s^r}\frac{K.N(s)}{D(s)}$$

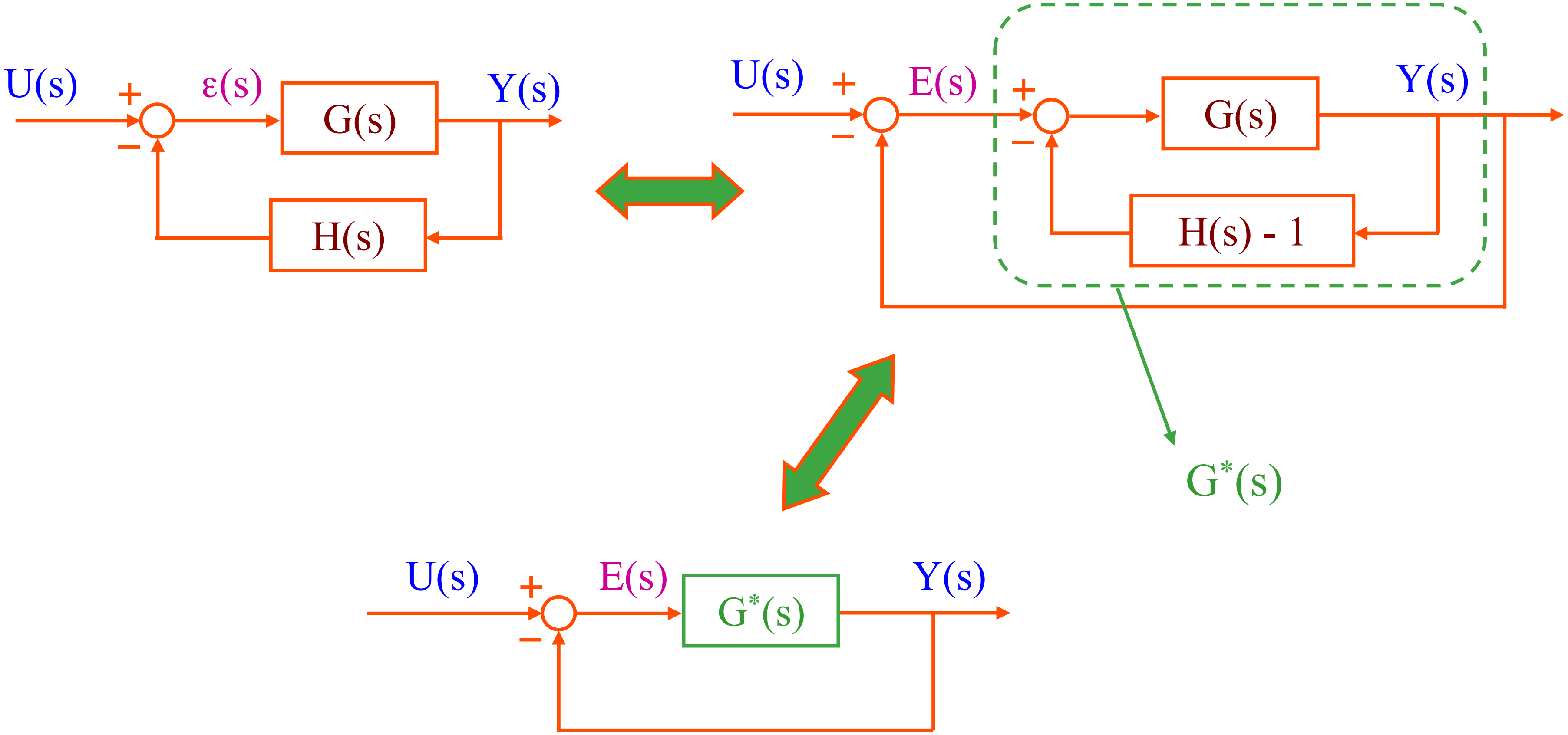
sistema de tipo r

Tipo	e_p	e_v	e_a
0	$\frac{A}{1+K_p}$	∞	∞
1	0	$\frac{tg(\theta)}{K_v}$	∞
2	0	0	$\frac{B}{K_a}$
3	0	0	0

Jorge J. Feliu Batlle

Análisis de la respuesta estacionaria (errores)

Realimentación no unitaria

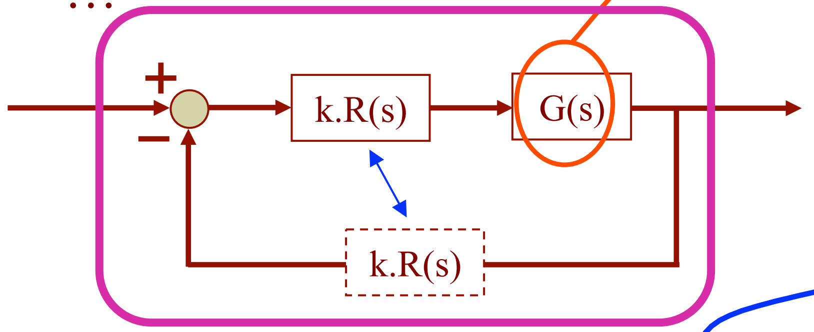


Respuesta temporal: Lugar de las Raíces

Es una técnica gráfica que permite ver la variación de los polos de un sistema EN LAZO CERRADO cuando cierto parámetro k varía de 0 a ∞ . Permite realizar estudios sobre:

- Régimen transitorio
- Estabilidad
- Diseño de reguladores
- …

$$G(s) = \frac{N(s)}{D(s)} = \hat{K}\frac{\prod(s - z_i)}{\prod(s - p_i)}$$

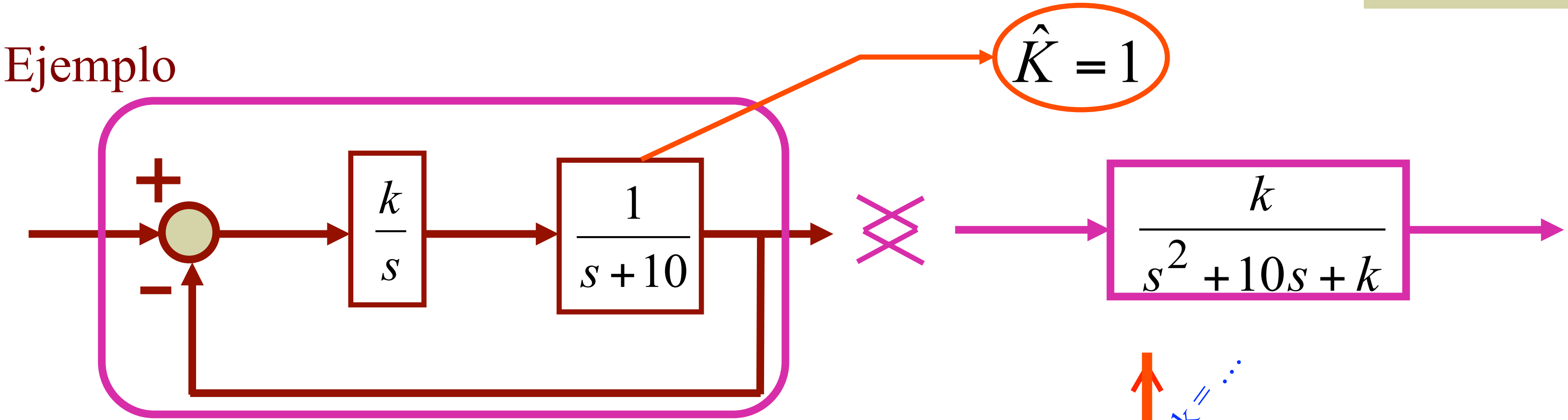


$$\frac{Numerador}{1 + k.R(s)G(s)}$$

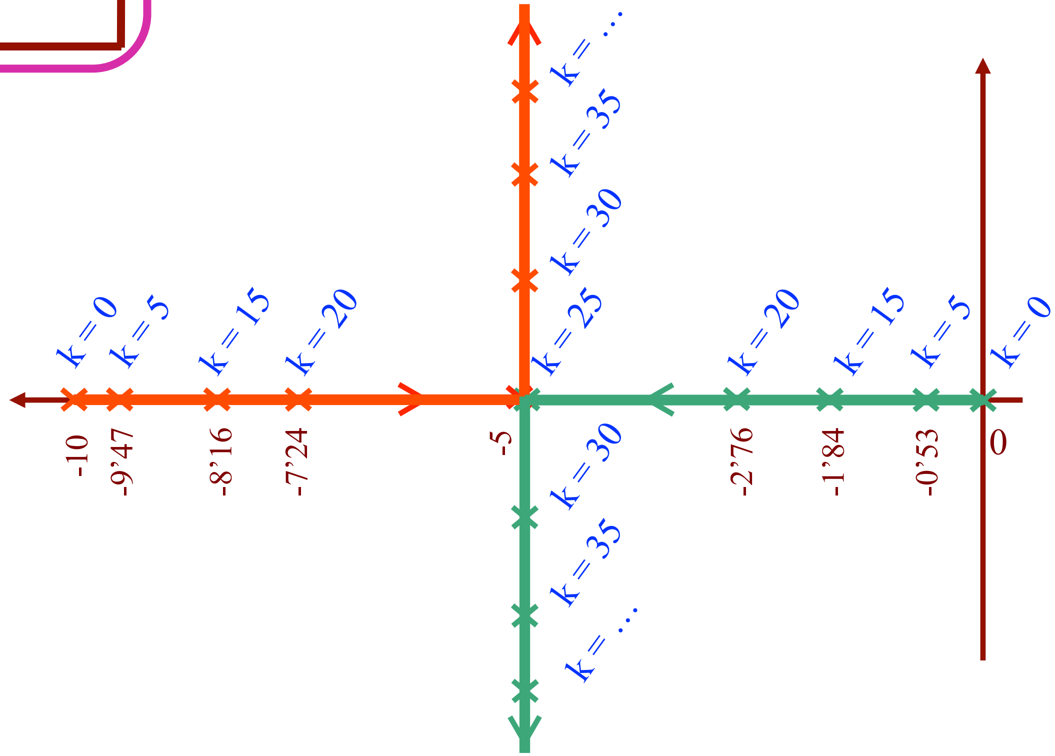
Según varía k varían las raíces de *1+k.R(s)G(s)*

Respuesta temporal: Lugar de las Raíces

Ejemplo



k	Raíz 1	Raíz 2
0	-10	0
5	-9’47	-0’53
15	-8’16	-1’84
20	-7’24	-2’76
25	-5	-5
30	-5+2’24j	-5-2’24j
35	-5+3’16j	-5-3’16j
…	…	…

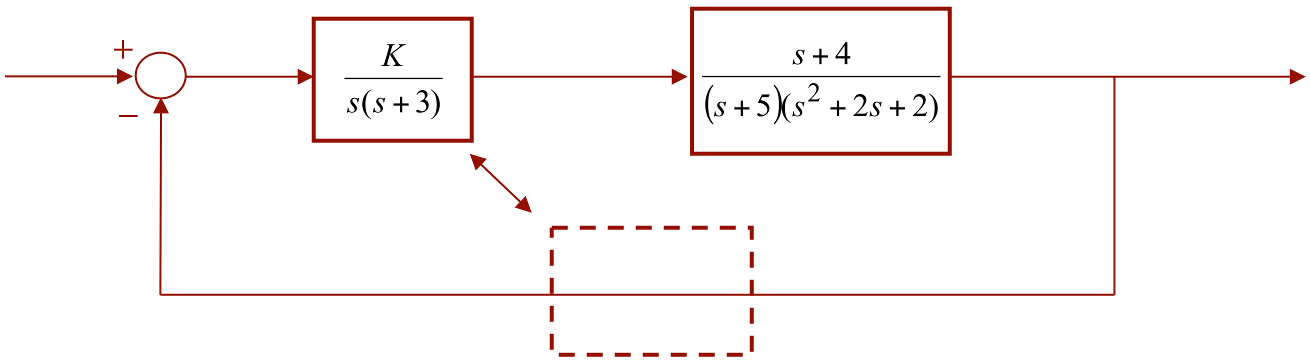


Respuesta temporal: Lugar de las Raíces

Reglas para su trazado

- Permiten un trazado aproximado del $\mathcal{L}.\mathcal{R}.$
- Usan información en lazo abierto y en lazo cerrado
- Es necesaria cierta experiencia

EJEMPLO



Jorge J. Feliu Batlle

Respuesta temporal: Lugar de las Raíces

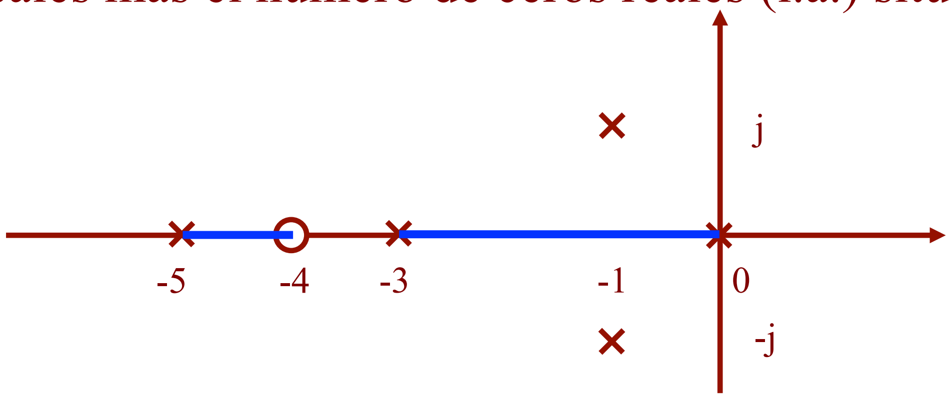
1) Calcular los polos y los ceros del sistema en lazo abierto (l.a.)

$$z_1 = -4,\ p_1 = 0,\ p_2 = -3,\ p_3 = -5,\ p_4 = -1+j,\ p_5 = -1-j$$

2) El número de ramas es igual al número de polos en lazo abierto → 5

3) Las ramas comienzan en los polos en lazo abierto ($k = 0$) y acaban en los ceros en lazo abierto ($k = \infty$). Si el nº de ceros (m) es menor que el nº de polos (n) entonces se supone que hay n-m ceros en el infinto → $m = 1$, $n = 5$

4) Los puntos del eje real que pertenecen al $\mathcal{L}.\mathcal{R}.$ son los que cumplen que el nº de polos reales más el número de ceros reales (l.a.) situados a su derecha es impar.



Respuesta temporal: Lugar de las Raíces

5) El $\mathcal{L}.\mathcal{R}.$ es simétrico respecto al eje real

6) Las ramas del $\mathcal{L}.\mathcal{R}.$ que terminan en el infinito son asintóticas a rectas cuyos ángulos con el eje real son: $\theta_a = \dfrac{(2q+1)\pi}{n-m}; \quad q = 0, 1, 2, \cdots, n-m-1$

n = 5

m = 1

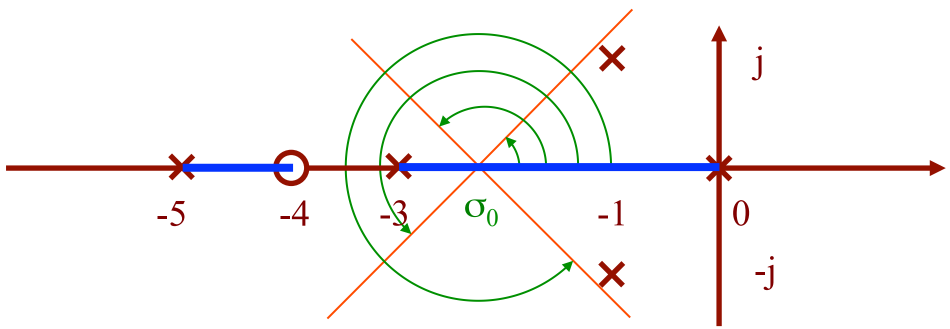
n – m - 1 = 3

q = 0 ⇒ $q_{a1} = p/4$

q = 1 ⇒ $q_{a2} = 3p/4$

q = 2 ⇒ $q_{a3} = 5p/4$

q = 3 ⇒ $q_{a4} = 7p/4$

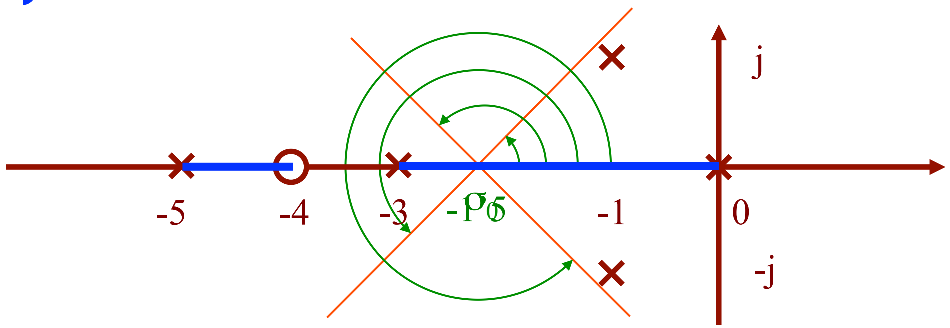


Respuesta temporal: Lugar de las Raíces

7) Las asíntotas cortan al eje real en un punto situado a una distancia dada por:

$$\sigma_o = \frac{\sum polos\ en\ l.a. - \sum ceros\ en\ l.a.}{n-m}$$

$$\left.\begin{aligned} n &= 5 \\ m &= 1 \\ n - m &= 4 \end{aligned}\right\} \Rightarrow s_o = \frac{0-3-5-1+j-1-j-(-4)}{4} = -1'5$$



Respuesta temporal: Lugar de las Raíces

8) Puntos de confluencia y dispersión

Son los puntos donde las ramas del $\mathcal{L}.\mathcal{R}.$ entran o salen del eje real

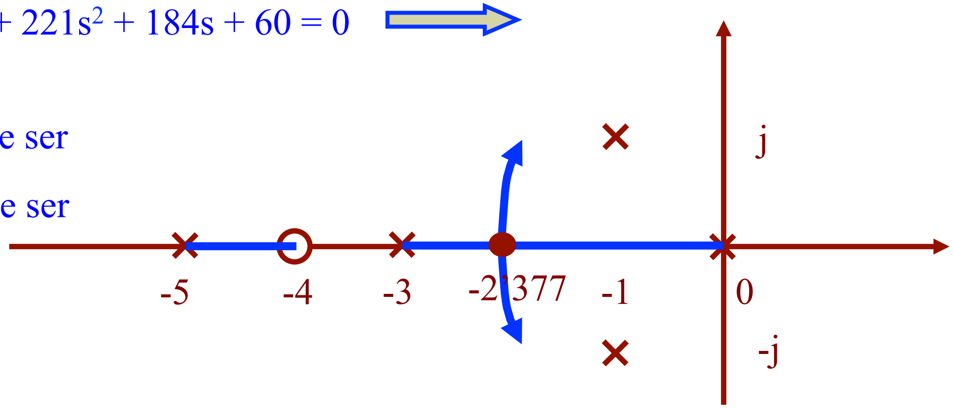
Coinciden con los máximos y mínimos relativos de K

$$1 + K.R(s).G(s) = 0 \Rightarrow K = \frac{-1}{R(s)G(s)} \Rightarrow \frac{dK}{ds} = 0 \Rightarrow s \Rightarrow K$$

$$K = \frac{-1}{\dfrac{1}{s\,(s+3)}\,\dfrac{(s+4)}{(s+5)\,(s^2+2s+2)}} \Longrightarrow K = \frac{-s\,(s+3)\,(s+5)\,(s^2+2s+2)}{(s+4)} \Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow \frac{dK}{ds} = 0 \Longrightarrow 2s^5 + 25s^4 + 113s^3 + 221s^2 + 184s + 60 = 0 \Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow s = \begin{cases} -4'34 \pm 0'668\,j \Longrightarrow \text{No puede ser} \\ -0'72 \pm 0'37\,j \Longrightarrow \text{No puede ser} \\ -2'377 \Longrightarrow K = 6'93 \end{cases}$$



Respuesta temporal: Lugar de las Raíces

9) Puntos de intersección del $\mathcal{L}.\mathcal{R}.$ con el eje imaginario

$$s = j\omega \Rightarrow 1 + K.R(s).G(s) = 0 \Rightarrow \begin{cases} \text{parte real} = 0 \\ \text{parte imaginaria} = 0 \end{cases} \Rightarrow K \text{ y } \omega$$

$$1 + K\frac{1}{s\,(s+3)}\,\frac{(s+4)}{(s+5)\,(s^2+2s+2)} = 0 \Rightarrow$$

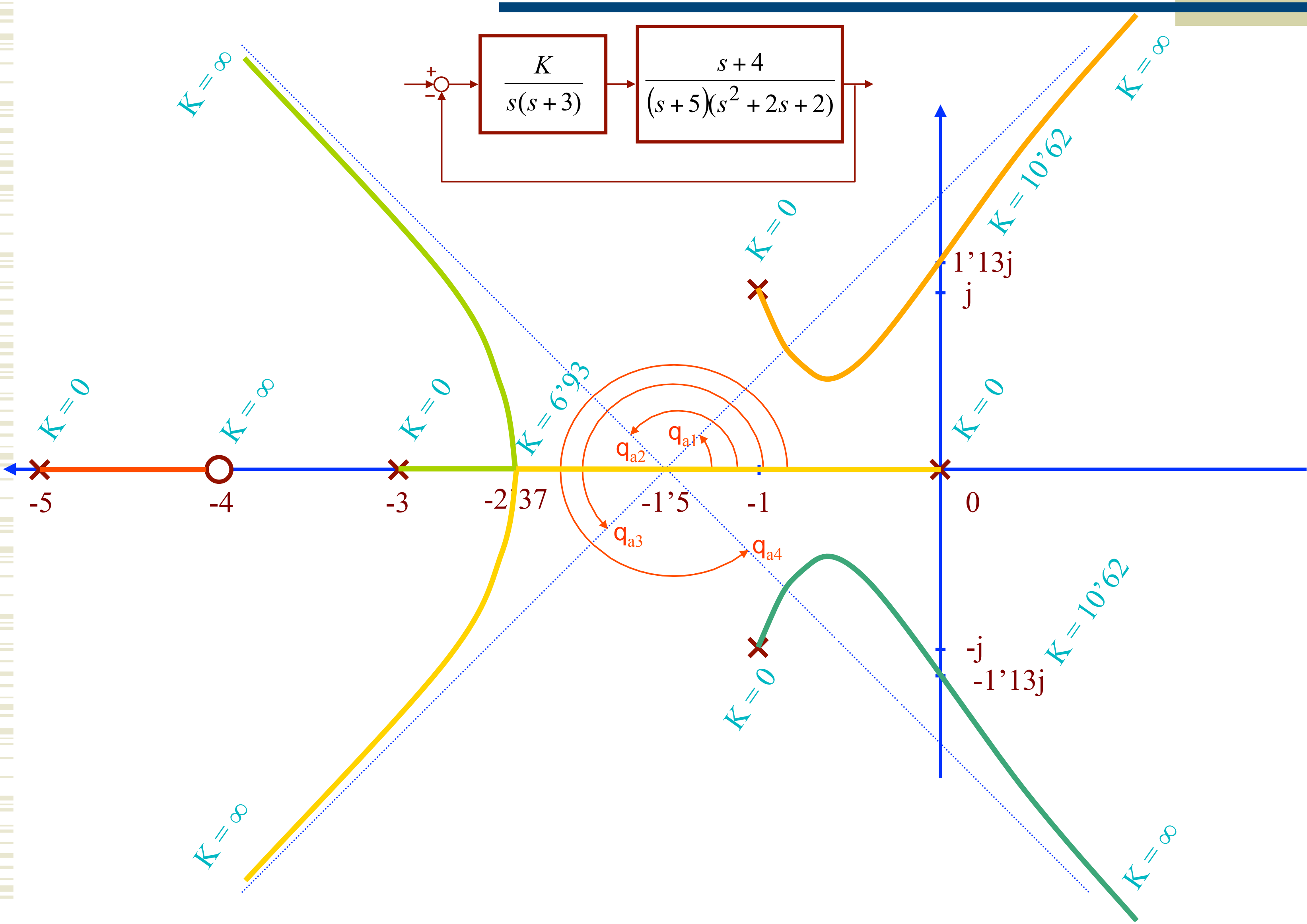
$$s^5 + 10s^4 + 33s^3 + 46s^2 + (30+K)s + 4K = 0 \xrightarrow{s = j\omega}$$

$$\omega^5.j + 10.\omega^4 - 33.\omega^3.j - 46.\omega^2 + (30+K).\omega j + 4K = 0 \Rightarrow \begin{cases} \text{parte real} = 0 \\ \text{parte imaginaria} = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 10.\omega^4 - 46.\omega^2 + 4K = 0 \\ \omega^5.j - 33.\omega^3.j + (30+K).\omega j = 0 \end{cases} \Rightarrow K = 10'63 \text{ y } \omega = 1'13 \text{ rad/s}$$

Jorge J. Feliu Batlle

Respuesta temporal: Lugar de las Raíces



Respuesta temporal: Lugar de las Raíces

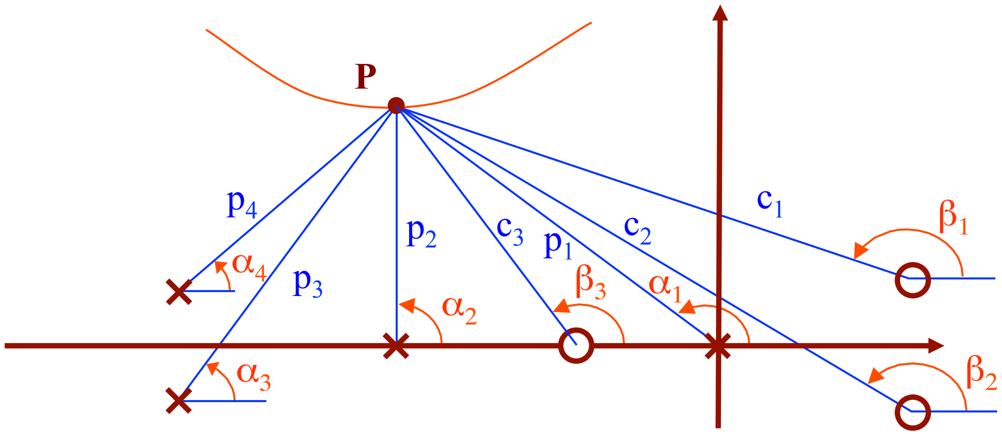
Propiedades:

Todos los puntos del $\mathcal{L}.\mathcal{R}.$ cumplen que:

$$\angle R(s)G(s) = (2q+1)\pi; \quad q \in Z$$

La ganancia K que provoca la aparición de un punto del $\mathcal{L}.\mathcal{R}.$ es:

$$K = \frac{1}{\left|G(s)R(s)\right|}$$



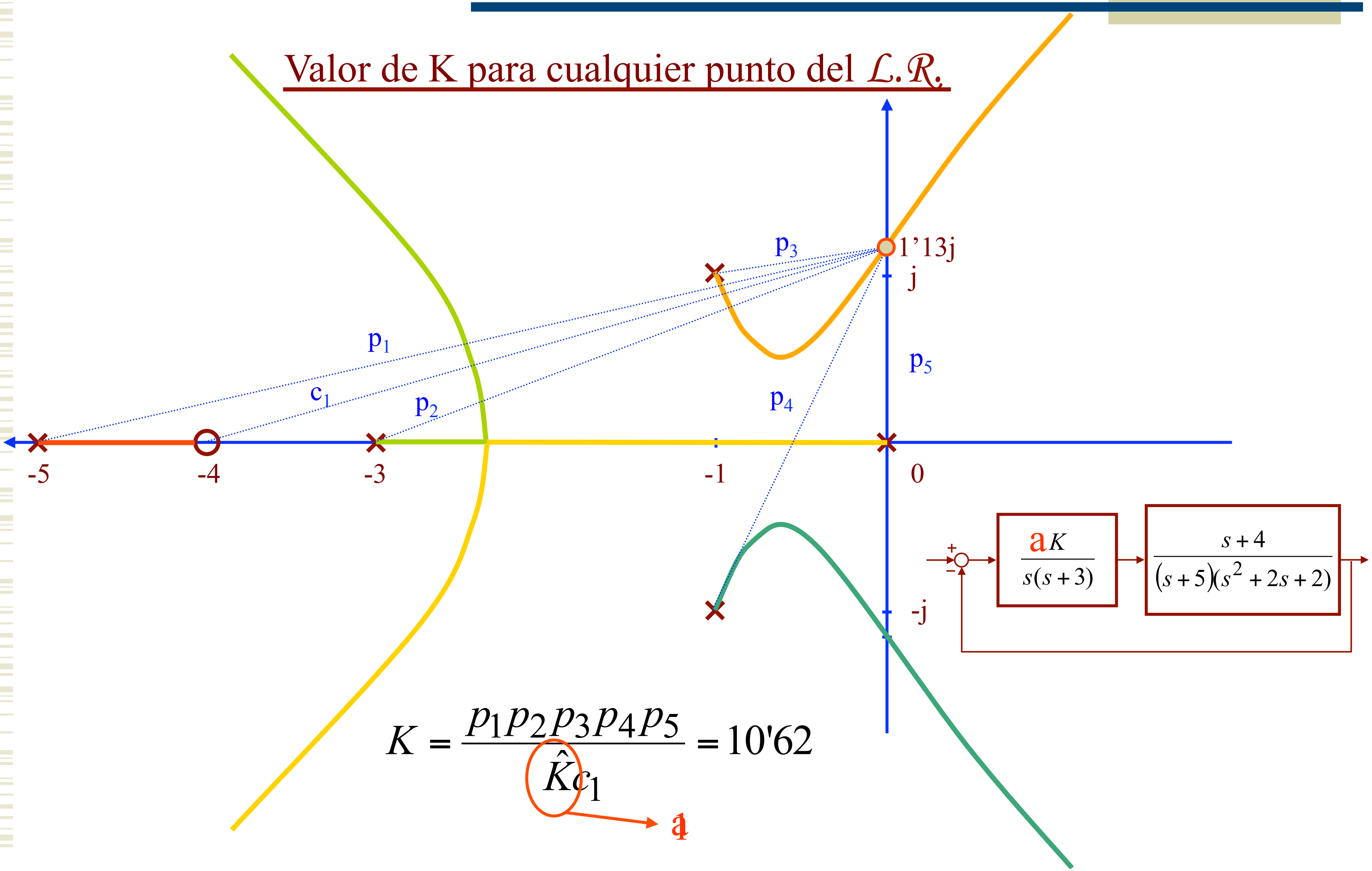
$\beta_1 + \beta_2 + \beta_3 - (\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 + \alpha_4) = (2q + 1)p$

pudiendo ser q = 0, ±1, ±2, ±3, …

$$K = \frac{p_1\, p_2\, p_3\, p_4}{\hat{K}\, c_1\, c_2\, c_3}$$

Respuesta temporal: Lugar de las Raíces

Valor de K para cualquier punto del $\mathcal{L}.\mathcal{R}.$

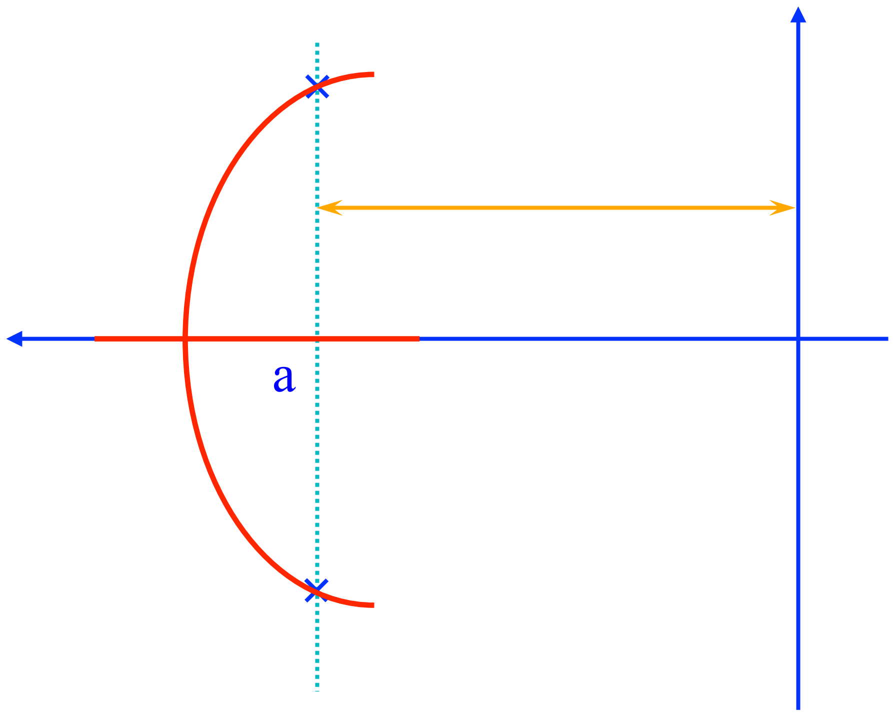


$$K = \frac{p_1 p_2 p_3 p_4 p_5}{\hat{K} c_1} = 10'62$$

a 4

Respuesta temporal: Lugar de las Raíces

Cálculo de K que da lugar a polos con parte real predeterminada



- Se calcula el polinomio característico en lazo cerrado: **$1 + K.\ R(s).G(s) = 0$**
- Se le aplica una traslación de ejes: **$s_1 = s + a$**
- $s_1 = j\omega$ y se igualan las partes real e imaginaria a cero

Respuesta temporal: Lugar de las Raíces

Cálculo de K que de lugar a polos con parte real predeterminada

Ejemplo

¿Qué valores de K provocan la aparición de polos con parte real -3?

$s^5 + 10s^4 + 33s^3 + 46s^2 + (30 + K)s + 4K$ (obtenido anteriormente) $\Rightarrow$ $s_1 = s + 3$

$\Rightarrow (s_1 - 3)^5 + 10(s_1 - 3)^4 + 33(s_1 - 3)^3 + 46(s_1 - 3)^2 + (30 + K)(s_1 - 3) + 4K = 0$

$\xrightarrow{\text{operando}} s_1^5 - 5s_1^4 + 3s_1^3 + 19s_1^2 - (30 - K)s_1 + K \xrightarrow{s_1 = j\omega}$

$$\omega^5.j - 5.\omega^4 - 3.\omega^3.j - 19.\omega^2 - (30 - K).\omega j + K = 0 \Rightarrow \begin{cases} \text{parte real} = 0 \\ \text{parte imaginaria} = 0 \end{cases}$$

Ojo con los resultados de ω

$$\begin{cases} -5.\omega^4 - 19.\omega^2 + K = 0 \\ \omega^5.j - 3.\omega^3.j - (30 - K).\omega j = 0 \end{cases} \Rightarrow K = 32'2 \text{ y } \omega = 1'127 \text{ rad/s}$$

Jorge J. Feliu Batlle

Respuesta temporal: Lugar de las Raíces